EXERCICES mpsi

PRODUIT SCALAIRE

1. : Dire si chacune des applications suivantes est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$:

$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) =$	symétrique ?	bilinéaire ?	$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) =$	positif ?	défini ?
xx'					
$xx' - yy'$					
$2xx' + yy' - xy' - x'y$					
$xy' + yx'$					
$(xx' + yy')^2$					

Idem pour $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = 2(xx' + yy' + zz') + xy' + yx' + xz' + zx' + yz' + zy'$ sur $\mathbb{R}^3$.

2. :

a. Montrer que dans un $\mathbb{R}$-espace muni d'un produit-scalaire :

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| \Leftrightarrow (\vec{x} + \vec{y}) \perp (\vec{x} - \vec{y}) \text{ et } \vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \|\vec{x} + \vec{y}\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

b. En déduire des CNS de géométrie :

- **i.** Un parallélogramme ABCD est un losange ssi
- **ii.** Un parallélogramme ABCD est un rectangle ssi
- **iii.** Un triangle ABC est isocèle en A ssi
- **iv.** Un triangle ABC est rectangle en A ssi

3. * : Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme $\| \ . \ \|$. On suppose que cette norme vérifie l'égalité du parallélogramme, à savoir :

$$\forall x, y \in \mathbb{E} \quad \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|x - \vec{y}\|^2 = 2\left(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2\right)$$

On se propose de démontrer que cette norme est euclidienne, c'est-à-dire qu'il existe un produit scalaire $(\ . \mid .)$ tel que $\forall \vec{x} \in \mathbb{E} \ \|\vec{x}\|^2 = (\vec{x} | \vec{x})$.

a. Montrer que si $(\ . \mid .)$ existe alors

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E} \qquad (\vec{x} | \vec{y}) = \left\| \frac{\vec{x} + \vec{y}}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{\vec{x} - \vec{y}}{2} \right\|^2$$

Cette formule définit une aplication de $\mathbb{E}^2$ vers $\mathbb{R}$; reste à montrer que c'est bien un produit scalaire.

b. Montrer que $(\vec{x_1} + \vec{x_2} | \ \vec{y}) = (\vec{x_1} | \vec{y}) + (\vec{x_2} | \vec{y})$ (indication : $\|(\vec{x_1} + \vec{x_2}) - \vec{y}\| = \|\vec{x_1} + (\vec{x_2} - \vec{y})\|$)

c. Pour $\vec{x}, \vec{y}$ fixés, on pose $f(\alpha) = (\alpha\vec{x} | \vec{y})$. Vérifier que

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad f(\alpha_1 + \alpha_2) = f(\alpha_1) + f(\alpha_2)$$

et que f est continue.

d. Conclure, en utilisant un résultat sur les fonctions continues.

CAUCHY-SCHWARZ

4. :

a. Prouver : $\forall(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \quad (x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 \leqslant n(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$
A quelle CNS a-t'on égalité ?
Redémontrer cette inégalité en utilisant l'inégalité de convexité.

b. Prouver :

$$(\alpha)\ :\ \forall n \geqslant 1 \quad \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$$

$$(\beta)\ :\ \forall n \geqslant 2 \quad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2} \geqslant \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n-k}\right)^2$$

5. Soit $\mathbb{E} = \left\{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})\ /\ \forall x \in [0,1] \quad f(x) \neq 0\right\}$. Pour $f \in \mathbb{E}$, on pose : $P(f) = \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 \frac{dx}{f(x)}$.

a. Montrer que $\min\limits_{f\in\mathbb{E}} P(f) = 1$; déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathbb{E}$ pour lesquelles $P(f) = 1$.

b. Montrer que $\sup\limits_{f\in\mathbb{E}} P(f) = +\infty$.

6. Montrer que pour $x \geqslant 1$, $\ln x \leqslant \sqrt{x-1}$ (prendre $f : t \mapsto 1$ et $g : t \mapsto \frac{1}{t}$). En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$.

7. Propriétés du produit scalaire usuel dans $M_n(\mathbb{R})$.

a. (Re)démontrer que $\left(A \mid B\right) = tr({}^tAB)$ définit un produit scalaire dans $M_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $|tr(A)| \leqslant \sqrt{n}\,\|A\|$; indication : $tr(A) = \left(I_n \mid A\right)$.

c. Montrer que $\left(A \mid B\right) = \left({}^tA \mid {}^tB\right)$, que $\left(AB \mid C\right) = \left(B \mid {}^tAC\right) = \left(A \mid C\,{}^tB\right)$, et que $\|AB\|^2 = \left({}^tAA \mid B\,{}^tB\right)$.

d. * Montrer que $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.

8. Soient (a_n) et (b_n) deux suites à termes $\geqslant 0$; on pose $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ et $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ et $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{a_kb_k}$.

a. Montrer que si les suites (s_n) et (t_n) sont convergentes, vers s et t respectivement, la suite (u_n) également, et $\lim u_n \leqslant \sqrt{st}$.

b. Calculer $s, t, \sqrt{st}$ et $\lim u_n$ dans le cas où $a_k = a^k$ et $b_k = b^k$, avec $a,b \in]0,1[$.

9. * : La *moyenne* de $X = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ est $M(X) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_i = m$; la *variance* de X est $V(X) = M\left((X-\overline{X})^2\right)$ où $\overline{X} = (m,\dots,m)$, l'*écart-type* est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ et la *covariance* de X et $Y = (y_i)$ est $Cov(X,Y) = M((X-\overline{X})(Y-\overline{Y}))$ (ici, le produit de deux élément de $\mathbb{R}^n$ se fait coordonnées par coordonnées).

a. Montrer que $Cov(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y)$.

b. Montrer que $(X,Y) \to Cov(X,Y)$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathbb{R}^n$, non "définie" sur $\mathbb{R}^n$ mais "définie" sur le sev des listes de somme nulle.

c. Montrer que la covariance est en valeur absolue inférieure ou égale au produit des écart-types. ($|Cov(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$).

ORTHOGONALITÉ

10. : Soit E un espace euclidien (donc de dimension finie) ; $\vec{x}$ est un vecteur inconnu mais on connait pour tout $\vec{y}$ le scalaire $\left(\vec{x} \mid \vec{y}\right)$. Ceci permet-il de retrouver le vecteur $\vec{x}$?

11. : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ espace euclidien ;

a. Montrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$; en déduire que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

b. * Soit E l'espace $C([a,b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel donné dans le cours ; soit $c \in]a,b[$ et $F = \left\{f \in E \,/\, f \text{ est nulle sur } [a,c]\right\}$ et $G = \left\{f \in E \,/\, f \text{ est nulle sur } [c,b]\right\}$.
Déterminer $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$; $(F \cap G)^{\perp} \neq F^{\perp} + G^{\perp}$.

12. : Déterminer une base orthonormale pour le produits scalaires rencontré dans l'exercice 1 :

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = 2(xx'+yy'+zz') + xy' + yx' + xz' + zx' + yz' + zy' \text{ sur } \mathbb{R}^3.$$

a. Méthode 1 : procéde de Schmidt sur la base canonique ; on trouve:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

b. Méthode 2 : remarquer que $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = XX' + YY' + ZZ'$ avec $X = y+z$ etc..

On trouve $\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

13. : Calculer le produit scalaire $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right)$ sachant que la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est orthonormée.

14. : Soit $\mathbb{E} = \left\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,/\, f \text{ est périodique de période } 2\pi\right\}$.

a. Vérifier que $\mathbb{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

b. Montrer que l'application : $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{E}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \left(f|g\right) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx \end{array}\right.$ est un produit scalaire dans $\mathbb{E}$.

c. Montrer que la famille $\mathcal{F}_n = (x \mapsto \cos kx)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est orthogonale. La rendre orthonormale (attention au cas $k = 0$ qui est à part).

d. Qu'en déduit-on pour la famille $\mathcal{F}_n$?

15. : Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\left(P|Q \right) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$.

a. Montrer que $\left(\,.\, \middle|\, .\, \right)$ est un produit scalaire dans $\mathbb{R}[X]$.

b. Déterminer $\left(X^k|X^l \right)$ et remplir le tableau

$(\,.\,\vert\,.\,)$	1	X	X^2
1			
X			
X^2			

.

c. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Réponse : $(1, \sqrt{3}X, \frac{\sqrt{5}}{2}(3X^2 - 1))$.

16. : Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, .., \vec{e}_n)$ une base de $\mathbb{E}$, espace euclidien, et $\left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, .., \vec{f}_n\right)$ la base orthogonale obtenue à partir de $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, .., \vec{e}_n)$ par le procédé de Schmidt, et

$\vec{g}_k = \dfrac{\vec{f}_k}{\left\|\vec{f}_k\right\|}$;

montrer que $\vec{f}_k = \vec{e}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \left(\vec{e}_k \;\middle|\; \vec{g}_i\right)\vec{g}_i$; en déduire que $\vec{f}_k = p_k(\vec{e}_k)$ où p_k est la projection orthogonale sur $\left(Vect(\vec{e}_1, \vec{e}_2, .., \vec{e}_{k-1})\right)^{\perp}$.

17. On dit que deux sev F et G sont faiblement orthogonaux s'il existe 3 sev deux à deux orthogonaux H, F', G' tels que $F = H \oplus F'$ et $G = H \oplus G'$

a. Montrer que deux sev sont faiblement orthogonaux ssi leurs orthogonaux le sont aussi.

b. Montrer que les sev engendrés par deux sous-familles d'une famille orthogonale sont faiblement orthogonaux.

ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

18. Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien, A sa matrice dans une base orthonormée ; montrer que

$$\left(\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E} \quad (\vec{x} \mid f(\vec{y})) = (f(\vec{x}) \mid \vec{y}) \right) \Leftrightarrow A \text{ est symétrique}$$

19. Soit p un projecteur de $\mathbb{E}$ espace euclidien de base F et de direction G.

a. Montrer que p est une projection orthogonale (c'est-à-dire $F \perp G$) ssi $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E} \quad \left(\vec{x} \mid p(\vec{y}) \right) = \left(p(\vec{x}) \mid \vec{y} \right)$. En déduire que $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de projection orthogonale dans une base orthonormée ssi $A^2 = A$ et A est symétrique (cf. ex 18).

b. * Montrer que p est une projection orthogonale ssi $\forall \vec{x} \in \mathbb{E} \quad \left(\vec{x} \mid p(\vec{x}) \right) \geqslant 0$.

c. * Montrer que p est une projection orthogonale ssi $\forall \vec{x} \in \mathbb{E} \quad \|p(\vec{x})\| \leqslant \|\vec{x}\|$.

1ère méthode : pour $\vec{x}$ dans F et $\vec{y}$ dans G, écrire que $\|p(\vec{x} + \lambda\vec{y})\|^2 \leqslant \|\vec{x} + \lambda\vec{y}\|^2$ et conclure.

2ème méthode : prendre $\vec{x}$ dans $G^{\perp}$ montrer que $\|p(\vec{x})\|^2 = \|p(\vec{x}) - \vec{x}\|^2 + \|\vec{x}\|^2$ et conclure.

20. :

a. Soit $s \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$. Montrer que s est une symétrie orthogonale ssi deux quelconques des trois conditions suivantes sont réalisées :

i. $s^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$

ii. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E} \quad \left(\vec{x} \mid s(\vec{y}) \right) = \left(s(\vec{x}) \mid \vec{y} \right)$

iii. $\forall \vec{x} \in \mathbb{E} \quad \|s(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$

b. En déduire que $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de symétrie orthogonale dans une base orthonormée ssi $A^2 = I_n$ et A est symétrique (cf. ex. 18).

21. : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ avec $\mathbb{E}$ espace euclidien muni d'une base orthonormale $\mathcal{B}$. On note $A = \mathfrak{M}at_{\mathcal{B}}(f)$.

a. Montrer que

$$\underbrace{\forall x \in \mathbb{E} \qquad f(\vec{x}) \perp \vec{x}}_{(1)} \quad \Leftrightarrow \underbrace{\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E} \quad \left(f(\vec{x}) \mid \vec{y}\right) = -\left(\vec{x} \mid f(\vec{y})\right)}_{(1')}$$

b. En déduire que f vérifie (1) si et seulement si A est antisymétrique.

c. Montrer que *en dimension 3*, f vérifie (1) si et seulement s'il existe $\vec{a}$ telle que pour tout $\vec{u}$, $f(\vec{u}) = \vec{a} \wedge \vec{u}$.

d. Montrer que parmi les trois propriétés suivantes, deux d'entre elles impliquent toujours la troisième :

i. $\forall \vec{x} \in \mathbb{E} \quad f(\vec{x}) \perp \vec{x}$

ii. $\forall \vec{x} \in \mathbb{E} \quad \|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$ (autrement dit f est un automorphisme orthogonal de $\mathbb{E}$).

iii. $f^2 = -\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$

Indication : pour i. et ii. ⇒iii. utiliser $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \left\|\vec{b} - \vec{a}\right\|^2 = 0$; pour ii. et iii. ⇒i. écrire $\left(f(\vec{x}) \mid \vec{x}\right) = \left(f(\vec{x}) \mid -f^2(\vec{x})\right)$; pour i. et iii. implique ii., écrire $\|\vec{x}\|^2 = \left(\vec{x} \mid -f^2(\vec{x})\right)$.

Un tel endomorphisme s'appelle une isométrie antisymétrique.

e. Donner des exemples d'isométrie antisymétrique en dimension 2, 3 ou 4, si c'est possible.

f. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une isométrie antisymétrique dans $\mathbb{E}$.

g. On suppose que f vérifie iii. ; on pose $\left(\vec{x} \mid \vec{y}\right)' = \left(\vec{x} \mid \vec{y}\right) + \left(f(\vec{x}) \mid f(\vec{y})\right)$. Montrer que $\left(\,.\mid .\,\right)'$ est un produit scalaire, et que f est une isométrie antisymétrique pour ce produit scalaire.

22. : Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels euclidiens.

a. f est une application de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$, et g une application de $\mathbb{F}$ vers $\mathbb{E}$. Montrer que si

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{E}\ \forall \vec{y} \in \mathbb{F} \quad \left(f(\vec{x}) \mid \vec{y}\right) = \left(\vec{x} \mid g(\vec{y})\right)$$

alors f et g sont linéaires.

Indication : calculer $\left(f(\vec{x} + \lambda\vec{y}) - f(\vec{x}) - \lambda f(\vec{y}) \mid \vec{z}\right)$.

b. Montrer que si f est une application linéaire de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$, il existe une unique application g de $\mathbb{F}$ vers $\mathbb{E}$ vérifiant

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{E}\ \forall \vec{y} \in \mathbb{F} \quad \left(f(\vec{x}) \mid \vec{y}\right) = \left(\vec{x} \mid g(\vec{y})\right)$$

Indication : pour $\vec{y} \in \mathbb{F}$ fixé, considérer la forme linéaire $\vec{x} \mapsto \left(f(\vec{x}) \mid \vec{y}\right)$.

Déduire du (a) la linéarité de g ; montrer que les matrices de f et g dans des bases orthonormées de $\mathbb{E}$ et de $\mathbb{F}$ sont transposées l'une de l'autre.
g est appelée la transposée de f.

23. :

a. Rappeler comment est défini le produit scalaire usuel dans $M_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que l'application $A \mapsto {}^tA$ est une symétrie orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$.

24. : Soit $\vec{n}$ un vecteur unitaire d'un espace vectoriel euclidien $\mathbb{E}$; on appelle p la projection orthogonale sur la droite $D = \mathrm{vect}\left(\vec{n}\right)$ et s la réflexion de base $\vec{n}^{\perp}$.

a. Rappeler la formule pour $p(\vec{x})$ utilisant le produit scalaire.

b. Donner la matrice de p dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ dans le cas où $\dim \mathbb{E} = 3$, et où $\vec{n}\left| \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right._{/\mathcal{B}}$.

c. En déduire, toujours dans ce cas, la matrice de la réflexion s dans $\mathcal{B}$.

d. * Revenant au cas général, montrer que si N est la matrice colonne des coordonnées de $\vec{n}$ dans une base orthonormale $\mathcal{B}$, X celle de $\vec{x}$ et Y celle de $p(\vec{x})$, alors $Y = N^tNX$; en déduire $P = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(p)$ et $S = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(s)$; expliquer alors comment a été fabriqué l'exercice 7 a) sur les matrices.

25. * : On considère $E = \{f \in C^2([a,b],\mathbb{R}) \,/\, f(a) = f(b) = 0\}$.

a. Vérifier que E est un espace vectoriel ; on le munit du produit scalaire défini par $(f \mid g) = \int_a^b fg$

b. Montrer que la dérivation D est un endomorphisme antisymétrique de E, c'est-à dire que pour tout $f, g \in E$

$$(D(f) \mid g) = -(f \mid D(g))$$

que dire de D^2 ?

c. En déduire que $\ker(D^2 - \lambda id_E)$ et $\ker(D^2 - \mu id_E)$ sont orthogonaux pour $\lambda \neq \mu \in \mathbb{R}^*$.

d. On prend $a = 0$ et $b = \pi$; déterminer $\ker(D^2 - \lambda id_E)$ suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$.

AUTOMORPHISMES ET MATRICES ORTHOGONAUX

26. : Les endomorphismes non nuls conservant l'orthogonalité sont les similitudes.
Soit f un endomorphisme *non nul* d'un espace euclidien conservant l'orthogonalité, (c'est à dire $\vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow f(\vec{x}) \perp (\vec{y})$).

a. Montrer que f conserve l'égalité des normes, c'est-à-dire que si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ ont même norme alors $f(\vec{x})$ et $f(\vec{y})$ également (cf. exercice 1.)

b. Montrer que f est une similitude, c'est-à-dire la composée d'une isométrie avec une homothétie ; indications

- **i.** Montrer qu'il existe un vecteur unitaire $\vec{x_0}$ avec $\lambda = \|f(\vec{x_0})\| \neq 0$
- **ii.** Montrer que $g = \frac{1}{\lambda} f$ est une isométrie et conclure.

27. Soit f un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien $\mathbb{E}$; rappelons que $Inv(f) = \ker(f - id)$ et $Inv^-(f) = \ker(f + id)$;
montrer que $(Inv(f))^\perp = \mathrm{Im}(f - id)$ et que $Inv^-(f)$ en est un sev.

28. : Soit $\vec{n}$ un vecteur normé d'un espace vectoriel euclidien $\mathbb{E}$. On pose $f(\vec{x}) = \vec{x} + \lambda(\vec{x} \mid \vec{n})\vec{n}$.

a. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que f soit une isométrie vectorielle.

b. Interpréter géométriquement l'application f dans ce cas, ainsi que $-f$.

29. : Soit $\vec{n}$ un vecteur normé d'un espace vectoriel euclidien $\mathbb{E}$, $s_{\vec{n}}$ la réflexion par rapport à $\vec{n}^\perp$ et f une isométrie quelconque ; montrer que $f \circ s_{\vec{n}} = s_{f(\vec{n})} \circ f$ (utiliser l'expression trouvée dans l'exercice précédent).

30. Soit $A = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$ une matrice orthogonale avec $g \neq 0$;

Montrer que A est directe ssi $\begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix} = g$ et A est indirecte ssi $\begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix} = -g$.

31. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_3)$;

a. Montrer que f est une réflexion ssi $-f$ est un retournement.

b. Montrer que plus généralement, f est une antirotation autour de $\vec{n}$ d'angle θ ssi $-f$ est une rotation autour de $\vec{n}$ d'angle $\theta + \pi$.

32. : Déterminer la nature, puis les éléments caractéristiques des endomorphismes f, g, h de $\mathbb{E}_3$ de matrices dans une base orthonormée directe :

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \; ; \; B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; C = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

33. : Remplir le tableau avec les dimensions correspondantes :

$f \in O(\mathbb{E}_3)$	$id_{\mathbb{E}_3}$	retournement	rotation d'angle $\in]0, \pi[$	$-id_{\mathbb{E}_3}$	réflexion	antirotation d'angle $\in]0, \pi[$
$\dim(\mathrm{Ker}(f - id_{\mathbb{E}_3}))$						
$\dim(\mathrm{Ker}(f + id_{\mathbb{E}_3}))$						

34. :

a. Soit D_1, D_2, D_3 trois droites vectorielles de $\mathbb{P}$. Construire la droite D telle que $s_D = s_{D_3} \circ s_{D_2} \circ s_{D_1}$.

b. Soit D_1, D_2, D_3 trois droites vectorielles deux à deux orthogonales de $\mathbb{E}_3$.

i. Déterminer $s_{D_3} \circ s_{D_2} \circ s_{D_1}$.

ii. Soit P_1 le plan contenant D_2 et D_3, P_2 le plan contenant D_1 et D_3, P_3 le plan contenant D_1 et D_2. Déterminer $s_{P_3} \circ s_{P_2} \circ s_{P_1}$.

35. : On donne dans $\mathbb{E}_3$ une réflexion s et une rotation r dont l'axe est inclus dans le plan de la réflexion. Déterminer la nature des composées $s \circ r$ et $r \circ s$.

36. : $\vec{n}$ étant un vecteur unitaire de $\mathbb{E}_3$, déterminer la nature de l'application f de $\mathbb{E}_3$ dans lui-même définie par $f(\vec{x}) = \left(\vec{n} \wedge \vec{x}\right) \wedge \vec{n}$.

37. : Forme générale d'une matrice de rotation dans une base orthonormale.
Soit r la rotation vectorielle de $\mathbb{E}_3$ autour de $\vec{n}$ ($\|\vec{n}\| = 1$) et d'angle θ ; on désigne par D la droite dirigée par $\vec{n}$, et P le plan orthogonal à $\vec{n}$, orienté par $\vec{n}$.

a. Soit $\vec{u} \in \mathbb{E}_3$, $\vec{u_1}$ le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur D, $\vec{u_2}$ le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur P et $\vec{u_3}$ l'image de $\vec{u_2}$ dans la rotation autour de $\vec{n}$ et d'angle $\pi/2$. Exprimer $r(\vec{u})$ en fonction de θ, $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$.

b. Déterminer $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{n}$ (rep pour $\vec{u_3}$: $\vec{n} \wedge \vec{u}$)

c. En déduire

$$\boxed{r(\vec{u}) = \cos\theta\vec{u} + (1 - \cos\theta)\left(\vec{n}\middle|\vec{u}\right)\vec{n} + \sin\theta\left(\vec{n} \wedge \vec{u}\right)}$$

(formule d'Olinde Rodrigues)

d. Montrer que la matrice de r dans une base orthonormale directe est de la forme :

$$\begin{bmatrix} a^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & ab(1-\cos\theta)-c\sin\theta & ac(1-\cos\theta)+b\sin\theta \\ ab(1-\cos\theta)+c\sin\theta & b^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & bc(1-\cos\theta)-a\sin\theta \\ ac(1-\cos\theta)-b\sin\theta & bc(1-\cos\theta)+a\sin\theta & c^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix}$$

avec $a^2+b^2+c^2=1$.

e. En déduire la forme générale d'une matrice de retournement dans une base orthonormale.

f. Soit f l'antirotation vectorielle de $\mathbb{E}_3$ autour de $\vec{n}$ et d'angle θ ; donner une expression de $f(\vec{u})$ similaire à l'expression de $r(\vec{u})$ dans (c), la matrice de f dans une base orthonormale directe, et la forme générale d'une matrice de réflexion dans une base orthonormale.

38. Dans cet exercice, on admet la formule $r(\vec{u}) = \cos\theta\vec{u} + (1-\cos\theta)\left(\vec{n}\middle|\vec{u}\right)\vec{n} + \sin\theta\left(\vec{n}\wedge\vec{u}\right)$ de l'exercice précédent, exprimant la rotation r de $\mathbb{E}_3$ autour de $\vec{n}$ ($\|\vec{n}\|=1$) et d'angle θ ; soit r' la rotation d'angle $-\theta$ autour de $\vec{n}$, et $f=\frac{1}{2}(r-r')$.

a. Calculer $f(\vec{u})$.

b. Soient A et B les matrices de r et f dans une base orthonormée directe ; montrer que $B=\frac{1}{2}(A-{}^tA)$.

c. En déduire que si $\theta\neq k\pi$ la connaissance de la matrice B permet de connaître $\sin\theta$ et $\vec{n}$. Appliquer cette méthode au premier endomorphisme de l'exercice 31.

39. : Soit f une rotation vectorielle de E_3 ; montrer que les énoncés suivants sont équivalents.

a. f est une rotation d'un tiers de tour.

b. $f^3 = id_{E_3}$ et $f\neq id_{E_3}$.

c. Il existe une base *orthonormée* dans laquelle la matrice de f s'écrit $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

d. $\mathrm{trace}(f)=0$.

40. * : Un bac C de dans le temps...
Soit α un réel quelconque ; les réels β et γ sont définis par

$$\beta=\alpha+\frac{2\pi}{3} \quad ; \quad \gamma=\alpha-\frac{2\pi}{3}$$

a. On pose $A=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$, $B=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$ et $C=\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha+\cos\alpha\cos\beta$.
Montrer en transformant ces expressions que A,B et C ont des valeurs constantes que l'on précisera, lorsque α varie.

b. Dans l'espace euclidien $\mathbb{E}_3$, on considère la base orthonormale $\mathcal{B}=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ et on définit les vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ en fonction de α par les formules :

$$\vec{u}=\frac{1}{3}\left((1+2\cos\alpha)\vec{i}+(1+2\cos\gamma)\vec{j}+(1+2\cos\beta)\vec{k}\right)$$
$$\vec{v}=\frac{1}{3}\left((1+2\cos\beta)\vec{i}+(1+2\cos\alpha)\vec{j}+(1+2\cos\gamma)\vec{k}\right)$$
$$\vec{w}=\frac{1}{3}\left((1+2\cos\gamma)\vec{i}+(1+2\cos\beta)\vec{j}+(1+2\cos\alpha)\vec{k}\right)$$

i. Montrer que pour tout réel α, $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base orthonormale de $\mathbb{E}$.

ii. Montrer que l'application linéaire f de $\mathbb{E}_3$ vers $\mathbb{E}_3$ telle que :

$$f\left(\vec{i}\right)=\vec{u} \quad ; f\left(\vec{j}\right)=\vec{v} \quad ; f\left(\vec{k}\right)=\vec{w}$$

a pour ensemble de vecteurs invariants la droite engendrée par $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

iii. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

41. * : Démontrer que dans le plan euclidien, tout endomorphisme est de façon unique la somme d'une similitude directe et d'une similitude indirecte.

42. * : Soit f l'endomorphisme de E_4 ayant pour matrice dans une base orthonormée :
$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ avec $\theta \in]0,\pi[$; montrer que f est une isométrie positive et que si $\vec{u}$ est un vecteur non nul, l'angle entre $\vec{u}$ et $f(\vec{u})$ est égal à θ, que le plan P engendré par $\vec{u}$ et $f(\vec{u})$ est stable par f et que la restriction de f à P est une rotation d'angle θ.

43. *: Décomposition de Cayley.
Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$; montrer que les énoncés suivants sont équivalents :
1. M est orthogonale et $I_n + M$ est inversible.
2. Il existe $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique telle que $I_n - A$ est inversible et $M = (I_n + A)(I_n - A)^{-1}$.
Montrer qu'alors la matrice A est unique et commute avec M, et que M est directe.

44. * : Traduction matricielle du procédé de Schmidt.

a. Étant donné une matrice inversible $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe une matrice orthogonale O et une matrice triangulaire supérieure T à coefficients diagonaux > 0 telle que $A = OT$.

Indication : considérer A comme la matrice de passage d'une base orthonormée à une base quelconque, et orthonormaliser cette derminère.

b. Montrer que le couple (O,T) est unique.

c. Montrer en se ramenant au cas précédent qu'il existe aussi un unique couple (O',T') ayant les mêmes propriétés tel que $A = T'O'$.

d. Calculer O,T,O',T' pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

PRODUIT VECTORIEL

45. :

a. Montrer que dans $\mathbb{E}_3$, si $(\vec{u},\vec{v})$ est libre, $(\vec{u}\wedge\vec{v})^{\perp} = Vect\,(\vec{u},\vec{v})$ et $\vec{u}^{\perp} \cap \vec{v}^{\perp} = Vect(\vec{u}\wedge\vec{v})$.

b. Quelle est donc l'intersection des plans d'équation $ax+by+cz = 0$ et $a'x+b'y+c'z = 0$ dans une base orthonormée ?

46. * : Démonstration de la formule du double produit vectoriel, sans passer par les coordonnées.
Soient $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{E}_3$.

a. Montrer qu'il existe deux réels α,β tels que $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = \alpha\vec{v}+\beta\vec{w}$ (séparer les cas $(\vec{v},\vec{w})$ libre et $(\vec{v},\vec{w})$ liée).

b. Effectuer le produit scalaire des deux membres de cette égalité avec $\vec{u}$ et en déduire qu'il existe un réel λ tel que $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = \lambda\big(\big(\ \vec{u}\mid\vec{w}\big)\vec{v}-\big(\ \vec{u}\mid\vec{v}\big)\vec{w}\big)$

c. En utilisant l'exercice 10. (a) sur les applications linéaires, montrer qu'il existe λ, indépendant de $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ tel que $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = \lambda\big(\big(\ \vec{u}\mid\vec{w}\big)\vec{v}-\big(\ \vec{u}\mid\vec{v}\big)\vec{w}\big)$

d. En utilisant le fait que si $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est orthonormée, $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{i}\wedge\vec{j}\right)$ est orthonormée directe, montrer que $\lambda = 1$.

47. :

a. Montrer que si $\vec{i} \neq \vec{0}$, $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une base orthonormée directe ssi $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ et $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$.

Soit $f \in L(\mathbb{E}_3)$; on rappelle que $f \in O^+(\mathbb{E}_3)$ ssi l'image d'une base orthonormée directe $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une base orthonormée directe.

b. Montrer que $f \in O^+(\mathbb{E}_3) \Leftrightarrow f \neq 0$ et $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}_3 \quad f(\vec{x} \wedge \vec{y}) = f(\vec{x}) \wedge f(\vec{y})$.

c. En déduire que $f \in O^-(\mathbb{E}_3) \Leftrightarrow f \neq 0$ et $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}_3 \quad f(\vec{x} \wedge \vec{y}) = -f(\vec{x}) \wedge f(\vec{y})$.

48. : Montrer qu'il existe une unique rotation, et une unique antirotation de $\mathbb{E}_3$ transformant un couple orthonormé donné de vecteurs en un autre couple orthonormé donné de vecteurs.